RICERCA DEGLI ESTREMI DI UNA FUNZIONE A PIÙ VARIABILI

- ESTREMI LIBERI

DEF. 1

$\hookrightarrow f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \bar{x}_0 \in D$

DIREMO CHE $\bar{x}_0$ È UN PUNTO STAZIONARIO (CRITICO)

SE $\bar{\nabla} f(\bar{x}_0) = \bar{0}$

$n = 2$

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

$n = 3$

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

DEF. $\bar{x}_0 \in D$ $\quad \bar{x}_0$ SI DICE PUNTO DI SELLA SE È STAZIONARIO, MA NON È UN ESTREMO

ES. $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad (x_0, y_0) = (0,0)$

$\underset{\text{VARIAZIONE}}{\Delta_{P_0}} f = f(x,y) - f(x_0, y_0)$ $\quad x = x_0 + h$

$y = y_0 + k$

$\Delta_{P_0} f(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$

SE (x_0, y_0) È UN MINIMO, ALLORA $\Delta_{P_0} f(h,k) \geq 0$ $\quad h, k$ VICINI A ZERO } LOCALI

" " " " MASSIMO " " ≤ 0 " "

" " " DI SELLA IN OGNI INTORNO $\Delta f_{P_0}(h,k)$ CAMBIA SEGNO

- TEOREMA DI FERMAT

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \bar{x}_0$ INTERNO AL DOMINIO

$\bar{x}_0$ È UN ESTREMO (MIN./MAX)

$\exists \, \bar{\nabla} f(\bar{x}_0)$

$\Rightarrow \bar{x}_0$ È SICURAMENTE UN PUNTO STAZIONARIO

COND. NECESS. MA NON SUFFICIENTE

ESEMPIO

$f(x,y) = x^3 + 3(y-1)^2$ $\quad D = \mathbb{R}^2$

$P_0 = (0,1)$ $\quad f(P_0) = 0 \leq f(x,y)$ $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

MINIMO GLOBALE $\quad <$

$$\begin{cases} f'_x = 2x \\ f'_y = 6(y-1) \end{cases}$$

$f'_x(0,1) = 0$

$f'_y(0,1) = 0$

ESEMPIO

$f(x,y) = x^2 - y^3$ $\quad D = \mathbb{R}^2$

$f'_x = 2x$ $\quad f'_y = -3y^2$ $\quad (0,0)$ È P.TO STAZIONARIO

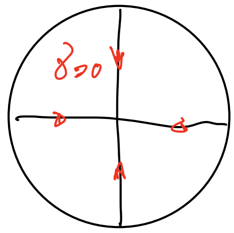
$\frac{\quad}{\quad}$

$f'_{xx} = 2 \qquad f'_{yy} = -6y$

$f'_{xy} = 0 \qquad f'_{yx} = 0$

$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix} \qquad -12y > 0\,?$

$\Delta_0 f(h,k) = f(h,k) - \underbrace{f(0,0)}_{=0} = f(h,k)$



AVVICINIAMOCI ALL'ORIGINE LUNGO L'ASSE y

$\Delta_0 f(0,k) = f(0\,k) = -k^3$

PUNTO SELLA! CAMBIA SEGNO IN BASE A K

1° PASSO RICERCA ESTREMI LIBERI

↳ RICERCA DEI PUNTI STAZIONARI INTERNI AL DOM.

S_f = INSIEME DI PUNTI STAZIONARI DI f INTERNI AL DOMINIO

- I SOLI CANDIDATI AD ESSERE ESTREMI LIBERI DI f STANNO IN S_f

$n = 2 \quad \begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$ CERCHIAMO LE SOLUZIONI INTERNE AL DOMINIO

ESERCIZIO

$f(x,y) = x^4 - 2(x^2 - y)^2 - 4y$

$f'_x = 4x^3 - 4(x^2-y)\cdot 2x = 4x^3 - 8x^3 + 8xy = -4x^3 + 8xy$

$f'_y = [-4(x^2-y)\cdot -1] - 4 = 4x^2 - 4y - 4$

ESEMPIO

FATT.

$\begin{cases} x(2y - x^2) = 0 \\ \end{cases}$

$\begin{cases} -4x^3 + 8xy = 0 \\ 4x^2 - 4y - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^3 + 2xy = 0 \\ x^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^3 + 2x(x^2-1) = 0 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^3 + 2x^3 - 2x = 0 \\ \end{cases}$

↳ NON DIVIDERE PER LE VARIABILI

1 - SOSTITUZIONE DI VARIABILE (QUANDO SI PUÒ)
2 - RIDUZIONE
3 - FATTORIZZAZIONE

$\begin{cases} x^3 - 2x = 0 \\ \end{cases}$

$\begin{cases} x(x^2 - 2) = 0 \\ \end{cases} \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \pm\sqrt{2}$

$y = -1$

$y = 1$

$y = 1$

P.TI STAZ.

$A = (0, -1) \qquad C = (\sqrt{2}, 1)$

$B = (-\sqrt{2}, 1)$

$S_f = \{A, B, C\}$

ESERCIZIO

$$f(x,y) = \underbrace{(x^2 + xy)}\,\underbrace{e^{y-x}}$$

$$f'_x = (2x+y)e^{y-x} + (x^2+xy)\cdot e^{y-x}\cdot -1$$

$$f'_y = x(e^{y-x}) + (x^2+xy)\,e^{y-x}\cdot 1$$

$$f'_x = e^{y-x}(2x+y-x^2-xy)$$

$$f'_y = e^{y-x}(x+x^2+xy)$$

RIDUZIONE → SOMMARE LE DUE EQUAZIONI

$$\begin{cases} 2x+y-x^2-xy = 0 \\ x+x^2+xy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y+x=0 \\ x+x^2+x(-3x)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y+3x=0 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} y=-3x \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ -2x^2+x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ x(1-2x)=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=0 \\ x_2 = 1/2 \end{matrix}$$

$A = (0,0)$

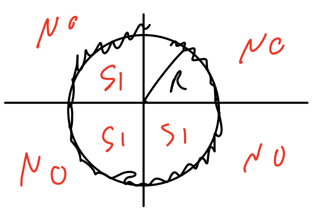
$B = (1/2, -3/2)$

$$S_f = \{A, B\}$$
$$\downarrow$$
$$\bar{0}$$

ESEMPIO

$$f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$$

$$D: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2 > 0\} \rightarrow x^2+y^2 < 1$$



$R = 1$

CIRCONF. ESCLUSA

$$f'_x = \frac{-2x}{1-x^2-y^2} \qquad \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

$$f'_y = \frac{-2y}{1-x^2-y^2}$$

UNICO PUNTO STAZIONARIO È $(0,0)$

È P.TO INTERNO? SI $\quad 0+0<1$? SÌ

$$S_f = \{\bar{0}\}$$

2° PASSO RICERCA ESTREMI → TEST MAT. HESSIANA

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (x_0, y_0) È INTERNO A D

$f \in C^2(D)$

FORM. DI TAYLOR DI 2° ORDINE RESTO DI PEANO

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} q_{H(x_0,y_0)}(h,k) + \varepsilon(h,k) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$$

$$q_H = f_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2$$

$$\frac{\varepsilon(h,k)}{h^2+k^2} \xrightarrow{h,k\to 0} 0$$

$(x_0, y_0) \in S_f$ → IL P.TO STAZ. $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$

$$\Delta_{P_0} f(h,k) = \frac{1}{2} q_H + \varepsilon(h,k)$$

$P_0 = (x_0, y_0)$

IL SEGNO LO DETTA QUESTO TERMINE È "SOSTANZIALMENTE" DETTATO DALLA FORMA QUADRATICA

1) $H(x_0,y_0)$ È DEF. POS. $\Leftrightarrow$ $q_H(h,k) > 0$
ALLORA (x_0,y_0) È P.TO DI MINIMO LOC.

2) SE $H(x_0,y_0)$ È DEF. NEG $\Leftrightarrow$ $q_H(h,k) < 0$
ALLORA (x_0,y_0) È P.TO DI MASS. LOC.

3) SE $H(x_0,y_0)$ È INDEF. $\Leftrightarrow$ (x_0,y_0) È DI SELLA

CASI BASTARDI

1) $H(x_0,y_0)$ È NULLA

2) $H(x_0,y_0)$ È SEMIDEFINITA

↳ PUÒ SUCCEDERE DI TUTTO
LA MAT. H NON SERVE A NULLA SULLA NATURA DI (x_0,y_0)